Sự khả tích trên hình hộp và tích phân trên miền tổng quát

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 16 tháng 10 năm 2025

Liên tục thì khả tích

Định lý (2.1)

Một hàm liên tục trên một hình hộp thì khả tích trên đó.

Đây là điều kiện đủ cho sự khả tích mà ta sẽ sử dụng thường xuyên.

Để chứng minh định lý trên, ta sẽ sử dụng những kết quả sau từ môn Giải tích 2:

- Một tập con của $\mathbb{R}^n$ là compắc khi và chỉ khi nó bị đóng và bị chặn.
- Một hàm thực liên tục trên một tập compắc của $\mathbb{R}^n$ thì liên tục đều.
- Một hàm thực liên tục trên một tập compắc thì bị chặn.

Chứng minh

Giả sử $f : I \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục trên hình hộp I. Khi đó, f liên tục đều trên I. Do đó, cho $\epsilon > 0$, ta có $\delta(\epsilon) > 0$ sao cho nếu $\|x - y\| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ với mọi $x, y \in I$.

Lấy một phép chia bất kỳ P của I sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong một hình hộp con là nhỏ hơn δ.

> Một cách cụ thể, nếu chiều dài mỗi cạnh của một hình hộp nhỏ hơn a thì chiều dài của đường chéo của hình hộp đó phải nhỏ hơn $\sqrt{n}a$, nên ta chọn cạnh hình chữ nhật con có độ dài không quá $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Với hai điểm x và y bất kỳ trong cùng một hình hộp con R, ta luôn có $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, nên ta cũng có

$$\sup_R f - \inf_R f \leq \epsilon.$$

Do đó,

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_R \left(\sup_R f - \inf_R f \right) |R| \leq \epsilon \sum_R |R| = \epsilon |I|.$$

Theo điều kiện Cauchy về sự khả tích, ta kết luận được hàm f khả tích trên I. □

Ví dụ

Hỏi tích phân

$$\iint_{[0,1]^2} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

có tồn tại không? Vì sao?

Hàm $(x, y) \mapsto xy$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$, nên cũng liên tục trên $[0, 1] \times [0, 1]$.

Do đó, đây là hàm khả tích và tích phân tồn tại. 

Dẫn nhập: tập có thể tích không

Ví dụ: Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2}, \\ 1, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Hàm f không liên tục tại $x = \frac{1}{2}$. Hỏi f có khả tích hay không?

Cho $\epsilon > 0$. Ta chọn một phép chia P bất kỳ của đoạn $[0,1]$ sao cho chiều dài các khoảng con nhỏ hơn $\frac{\epsilon}{2}$.

Khi đó điểm $\frac{1}{2}$ thuộc về tối đa hai khoảng con và trên những khoảng này ta có $\sup f = 1$ và $\inf f = 0$; còn trên những khoảng còn lại, ta có $\sup f = 0 = \inf f$. Vì vậy, ta được

$$U(f,P) - L(f,P) < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

nghĩa là hàm f khả tích trên $[0,1]$. 

Từ ví dụ trên, ta thấy hàm không liên tục vẫn khả tích.

Mặt khác, nếu tập các điểm mà hàm không liên tục "lớn hơn" thì hàm có thể không còn khả tích.

Ví dụ: (hàm Dirichlet) Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hàm f không liên tục tại bất kỳ điểm nào. Trong chương trước, ta đã chứng minh f không khả tích.

Phần tiếp theo chỉ ra rằng nếu tập điểm không liên tục "có thể tích không" thì hàm vẫn khả tích.

Ta nói một tập con của $\mathbb{R}^n$ là có thể tích không nếu ta có thể phủ tập đó bằng hữu hạn hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kì.

Tập có thể tích không

Định nghĩa

Một tập con C của $\mathbb{R}^n$ được gọi là có thể tích (n-chiều) không (of content zero) nếu với mọi $\epsilon > 0$ có một họ hữu hạn các hình hộp n-chiều $\{U_1, U_2, \ldots, U_m\}$ sao cho

$$\bigcup_{i=1}^{m} U_i \supset C \qquad \text{và} \qquad \sum_{i=1}^{m} |U_i| < \epsilon.$$

Ghi chú: Nói cách khác, một tập con của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không nếu ta có thể bao phủ tập đó bằng hữu hạn các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn số dương cho trước bất kỳ.

Ví dụ

- Tập rỗng $\emptyset$ có thể tích n-chiều không với mọi $n \geq 1$ vì với mọi $\epsilon > 0$, ta có thể chọn bất kỳ một hình hộp I có $|I| < \epsilon$ và $\emptyset \subset I$.
- Tập hợp gồm 1 điểm trong $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều không với mọi $n \geq 1$ (xem slide sau cho $n = 1$).
- Một đoạn thẳng nằm ngang hay thẳng đứng trong $\mathbb{R}^2$ có diện tích không vì với đoạn nằm ngang $f(t) = t(a, x_1) + (1-t)(a, x_2)$, $t \in [0, 1]$ nối hai điểm (a, x_1) và (a, x_2) và với mọi $\epsilon > 0$, ta có thể chọn một hình hộp I có chiều ngang $x_2 - x_1$ và chiều cao $\frac{\epsilon}{x_2 - x_1}$ chứa đoạn này (xem Mệnh đề 2.3).
- Hội của 2 tập có thể tích không là một tập có thể tích không.

Một cách cụ thể, trong $\mathbb{R}$, tập $\{a\}$ có thể tích bằng 0. Thật vậy, cho $\epsilon > 0$, ta xét đoạn

$$U = \left[a - \frac{\epsilon}{4}, a + \frac{\epsilon}{4}\right].$$

Rõ ràng rằng $\{a\} \subset U$ và $|U| = \frac{\epsilon}{2}$, nên tập $\{a\}$ có thể tích bằng 0.

Mệnh đề 2.3

Đồ thị của một hàm khả tích trên một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$ *có thể tích không trong* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Chứng minh:

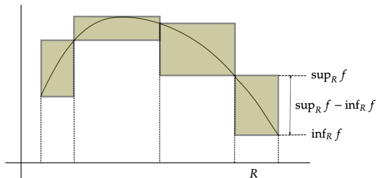
Cho f khả tích trên hình hộp $I \subset \mathbb{R}^n$. Cho $\epsilon > 0$. Ta có phép chia P của I sao cho

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_R \left(\sup_R f - \inf_R f \right) |R| < \epsilon.$$

Đồ thị của hàm f là tập

$$\{(x, f(x)) | x \in I\}$$

được phủ bởi họ tất cả các hình hộp $R \times [\inf_R f, \sup_R f]$.



Do đó, tổng thể tích của hình hộp này là

$$\sum_R \left(\sup_R f - \inf_R f \right) |R|,$$

nhỏ hơn ϵ. Lấy $\epsilon \to 0$, ta có được điều cần chứng minh. 

Ví dụ

• Đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.

Suy ra đồ thị của hàm $ax + by = c$ với $c \leq x \leq d$ là một tập có diện tích không.

Tương tự, đồ thị của một đoạn parabola $y = x^2$ với $a \leq x \leq b$ có diện tích không.

• Một đường hình tam giác trong mặt phẳng là hội của ba đoạn thẳng là một tập có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.

Tương tự, một đường hình đa giác, hội của hữu hạn đoạn thẳng, là một tập có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ

Chứng tỏ đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *trên mặt phẳng* $\mathbb{R}^2$ *có diện tích không trong* $\mathbb{R}^2$*.*

Nửa đường tròn trên là đồ thị của hàm

$$y = b + \sqrt{r^2-(x-a)^2}, \quad a-r \le x \le a+r.$$

Đây là một hàm liên tục trên $[a-r, a+r] \subset \mathbb{R}$ nên khả tích, và vì vậy theo Mệnh đề 2.4, đường tròn này có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.

Tương tự nửa đường tròn dưới có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$.

Đường tròn là hội của nửa đường tròn trên và nửa đường tròn dưới, là hội của hai tập có diện tích không, nên có diện tích không trong $\mathbb{R}^2$. $\square$

Liên tục trừ ra trên tập có thể tích không thì khả tích

Định lý (2.8)

Một hàm thực trên một hình hộp nếu bị chặn và liên tục trừ ra trên một tập có thể tích không thì khả tích trên hình hộp đó.

Chứng minh:

Giả sử f là một hàm thực bị chặn trên hình hộp I, nên tồn tại số thực M sao cho $|f(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$.

Gọi C là tập hợp các điểm thuộc I mà tại đó hàm f không liên tục. Theo giả thiết, C có thể tích không.

Ý tưởng chứng minh là dùng hữu hạn các hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn ϵ để phủ C, và dùng tính bị chặn của hàm f đối với phần này.

Trên phần của hình hộp còn lại, thì sử dụng tính chất f liên tục đều như trong phần chứng minh của định lý 2.1 (liên tục thì khả tích).

Cho $\epsilon > 0$, vì C có thể tích không nên tồn tại một họ các hình hộp $\{U_i\}_{1\leq i\leq m}$ phủ C và có *tổng thể tích* nhỏ hơn ϵ.

Giả sử mỗi hình hộp U_i là một hình hộp con của I (ví dụ, thay U_i bằng $U_i \cap I$). Ta muốn *tách rời* C khỏi các họ hình hộp này.

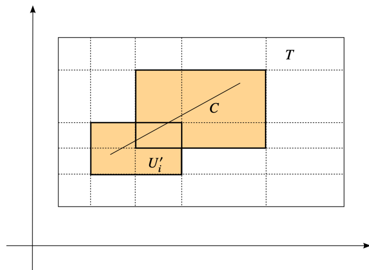
Mở rộng mỗi hình hộp U_i thành một hình hộp $U_i' \subset I$ có thể tích không quá 2 lần thể tích của U_i sao cho $U_i \subset \mathring{U}_i'$.

Do đó, ta có được một họ mới $\{U_i'\}_{1\leq i\leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn 2ϵ, và hội các phần trong của các hình hộp này chứa C.

Đặt

$$T = I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \mathring{U}_i'$$

thì T rời khỏi C. Vì vậy, f liên tục trên T.



Tương tự như phần chứng minh của Định lý 2.1 (liên tục thì khả tích), gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i' làm các điểm chia trên các cạnh của I.

Vì T là compắc nên f liên tục đều trên T. Do đó, ta có thể lấy được một phép chia P' mịn hơn P sao cho với bất kỳ hình hộp con R của P' chứa trong T thì $\sup_R f - \inf_R f < \epsilon$. Khi đó, với P', ta có

$$\sum_{R \subset T} \left(\sup_R f - \inf_R f \right) |R| < \epsilon \sum_{R \subset T} |R| \leq \epsilon |I|.$$

Nếu hình hộp con R của P' không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i' nào đó, nên

$$\begin{aligned}\sum_{R\not\subseteq T}\left(\sup_R f - \inf_R f\right)|R| &\le \sum_{R\not\subseteq T} 2M|R| \\ &= 2M\sum_{R\not\subseteq T}|R| \\ &= 2M\sum_{i=1}^{m}|U_i'| \\ &< 2M2\epsilon = 4M\epsilon.\end{aligned}$$

Kết hợp hai ước tính trên cho ta

$$U(f,P') - L(f,P') < (|I| + 4M)\epsilon.$$

Do đó, hàm f khả tích. 

Ví dụ

Chứng tỏ hàm $f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ *cho bởi*

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 3, & y \neq 2, \\ 4, & y = 2 \end{cases}$$

là khả tích.

Ta thấy trên $[0,1] \times [0,2]$, hàm f bị chặn. Hàm f không liên tục trên đoạn thẳng

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1, \; y = 2\}.$$

Đây là đoạn thẳng có diện tích không. Vì vậy, f khả tích. □

Định lý (2.11)

Giả sử f và g là hàm bị chặn trên một hình hộp I và $f(x) = g(x)$ trên I trừ ra một tập con có thể tích không. Khi đó, f khả tích trên I khi và chỉ khi g khả tích trên I, và ta có:

$$\int_I f = \int_I g.$$

Ghi chú: Giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.

Chứng minh

Đặt $h = f - g$ thì h bị chặn, và $h(x) = 0$ trừ ra trên một tập C có thể tích không.

Ta cần chứng minh h khả tích và $\int_I h = 0$ rồi sử dụng tính chất của tích phân và chứng minh tương tự như trong Định lý 2.4 (liên tục trừ ra trên tập có thể tích không thì khả tích).

Cho $\epsilon > 0$. Ta có một họ $\{U_i\}_{1 \leq i \leq m}$ các hình hộp con của I với tổng thể tích nhỏ hơn ϵ và hội các phần trong (tương đối với không gian I) của các hình hộp này chứa C. Đặt

$$T = I \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \mathring{U}_i,$$

thì T rời khỏi C, nên $h = 0$ trên T.

Gọi P là phép chia của I nhận được bằng cách lấy tọa độ đỉnh của các hình hộp U_i làm các điểm chia trên các cạnh của I. Trên T thì

$$\sum_{R\subset T}\left(\sup_R h\right)|R| = \sum_{R\subset T}\left(\inf_R h\right)|R| = 0.$$

Vì hàm h bị chặn nên tồn tại $M > 0$ sao cho $|h(x)| \leq M$ với mọi $x \in I$. Nếu hình hộp con R không chứa trong T thì R chứa trong một hình hộp U_i nào đó, nên

$$\sum_{R\not\subset T}\left(\sup_R h\right)|R| \leq \sum_{R\not\subset T} M|R| = M\sum_{R\not\subset T}|R| = M\sum_{i=1}^{m}|U_i| < M\epsilon.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sum_{R\not\subseteq T}\left(\inf_R h\right)|R| \geq \sum_{R\not\subseteq T} -M|R| = -M\sum_{R\not\subseteq T}|R| = -M\sum_{i=1}^{m}|U_i| > -M\epsilon.$$

Vậy, $-M\epsilon < L(h,P) \leq U(h,P) < M\epsilon$. Lấy giới hạn $\epsilon \to 0$ để kết luận rằng hàm h khả tích và $\int_I h = 0$. □

Ví dụ

Xét hàm $f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} 3, & y \neq 2, \\ 4, & y = 2, \end{cases}$$

và hàm $g : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ cho bởi $g(x,y) \equiv 3$.

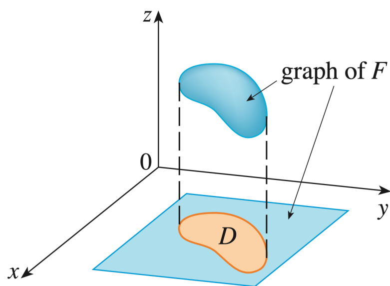
Ta thấy $f = g$ trừ ra trên tập $\{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ y = 2\}$ có diện tích không. Do đó,

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} f = \int_{[0,1]\times[0,2]} g = \int_{[0,1]\times[0,2]} 3 = 3(1-0)(2-0) = 6. \qquad \square$$

Chương 3: Tích phân trên miền tổng quát

Tích phân trên tập tổng quát

Chúng ta chỉ xét các tập con của $\mathbb{R}^n$, và ta dùng từ miền để chỉ một tập như vậy. Chúng ta chỉ xét những miền bị chặn.



Cho D là một miền bị chặn, và cho $f : D \to \mathbb{R}$. Vì D bị chặn nên có hình hộp I chứa D.

Mở rộng hàm f lên hình hộp I thành hàm $F : I \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ 0, & x \in I \setminus D. \end{cases}$$

Định nghĩa

Ta nói f khả tích trên D nếu F khả tích trên I, và khi đó tích phân của f trên D được định nghĩa là tích phân của F trên I:

$$\int_D f = \int_I F.$$

Để tích phân của f trên D được định nghĩa thì F phải bị chặn trên I. Do đó, f phải bị chặn trên D.

Nếu D là một hình hộp thì định nghĩa tích phân này trùng với định nghĩa đã có. Bổ đề tiếp theo cho ta biết định nghĩa tích phân nói trên chỉ phụ thuộc đầu vào là hàm f. Như thế người ta thường nói rằng tích phân đã được "định nghĩa tốt".

Bổ đề

Tích phân $\int_D f$ không phụ thuộc vào cách chọn hình hộp I.

Phần chứng minh có trên trang 33 của giáo trình.

Thể tích

Định nghĩa

Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$. Thể tích n-chiều của D được định nghĩa là tích phân của hàm 1 trên D:

$$|D| = \int_D 1.$$

Nếu D là hình hộp thì định nghĩa này trùng với định nghĩa của hình hộp đã có.

Khi $n = 1$ và $n = 2$ thì ta gọi thể tích lần lượt là "chiều dài" và "diện tích".

Hàm đặc trưng

Đặt *miền bị chặn* D vào trong một hình hộp I. Xét hàm có giá trị bằng 1 trên D và bằng 0 ngoài D:

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D. \end{cases}$$

Hàm χ_D được gọi là hàm đặc trưng của D. Theo định nghĩa thể tích, ta thấy rằng

$$|D| = \int_I \chi_D.$$

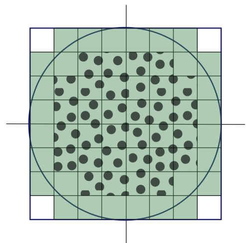
Điều này cho ta một cách xác định một miền D có thể tích hay không:

$$D \text{ có thể tích} \Leftrightarrow \text{tích phân Riemann } \int \chi_D \text{ tồn tại}.$$

Theo định nghĩa thể tích, ta thấy rằng:

$$|D| = \int_I \chi_D,$$

nên tập D có thể tích khi và chỉ khi tích phân $\int_I \chi_D$ tồn tại.



Hình: Xấp xỉ ngoài và xấp xỉ trong diện tích của một hình tròn

Thật vậy, với một phép chia P của I, ta thấy

$$U(\chi_D, P) = \sum_R \left(\sup_R \chi_D\right) |R| = \sum_{R \cap D \neq \emptyset} |R|,$$

$$L(\chi_D, P) = \sum_R \left(\inf_R \chi_D\right) |R| = \sum_{R \subset D} |R|,$$

nên tập D có thể tích khi và chỉ khi hai xấp xỉ này có thể gần nhau tùy ý.

Khi đó, số thực duy nhất nằm giữa được gọi là thể tích của D.

Định lý 3.3: Hình nào có thể tích?

Một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích n-chiều khi và chỉ khi biên của nó có thể tích n-chiều không.

Chứng minh:

Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, lấy một hình hộp I chứa D. Tập hợp các điểm không liên tục của χ_D chính là tập biên ∂D của D. Vậy χ_D khả tích khi và chỉ khi ∂D có độ đo không (theo Định lý 2.13: khả tích = bị chặn + liên tục hầu khắp).

Biên của một tập con của $\mathbb{R}^n$ luôn là một tập đóng. Ngoài ra vì D bị chặn nên ∂D cũng bị chặn, do đó ∂D là compắc.

Theo Bổ đề 7.4 (một tập compắc có độ đo không thì có thể tích không), ∂D có độ đo không khi và chỉ khi nó có thể tích không. □

Ví dụ

1. Xét *hình tròn* trong $\mathbb{R}^2$ cho bởi $x^2 + y^2 \leq R^2$ với biên là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$. Đường tròn này là hội của nửa đường tròn trên và nửa đường tròn dưới với phương trình là $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$.

   Theo Mệnh đề 2.4 (khả tích trong $\mathbb{R}^n$ thì có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$) thì hai tập nửa đường tròn này có thể tích không trong $\mathbb{R}^2$.

   Vì vậy, đường tròn có diện tích không, nên ta kết luận hình tròn có diện tích.

2. Tương tự, một hình tam giác thì có diện tích trong $\mathbb{R}^2$ vì biên của nó là hợp của hữu hạn những đoạn thẳng, là những tập có diện tích không.

3. Tập hợp $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ có biên là đoạn $[0, 1]$ và $|[0, 1]| = 1$, nên tập này không có chiều dài.

Sự khả tích và sự có thể tích

Tương tự như trong hình hộp, ta có những kết quả sau cho miền tổng quát:

Định lý (3.7)

Cho D là tập con có thể tích của $\mathbb{R}^n$. Hàm f xác định và bị chặn trên D, và tập điểm không liên tục của f có thể tích không, thì f khả tích trên D.

Chứng minh: *(tham khảo giáo trình)*

Điều kiện cần và đủ cho sự khả tích được cho bởi định lý:

Định lý (khả tích trên tập có thể tích = bị chặn + liên tục hầu khắp)

Cho D là tập con có thể tích của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, f khả tích trên D khi và chỉ khi f bị chặn và liên tục hầu khắp trên D.

Chứng minh: *(tham khảo giáo trình)*

Mệnh đề 3.8 Đồ thị của hàm khả tích có thể tích không

Đồ thị của một hàm khả tích trên một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$ có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.

Chứng minh.

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn và $f : D \to \mathbb{R}$. Gọi I là một hình hộp chứa D và F là mở rộng của f từ D lên I (bằng 0 ngoài D).

Vì f khả tích trên D nên F khả tích trên I.

Theo Mệnh đề 2.4, đồ thị của F có thể tích không trong $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vì đồ thị của f là một tập con của đồ thị của F nên cũng sẽ có thể tích không. □

Ví dụ: khối đa diện có thể tích

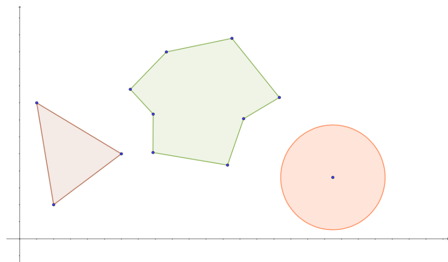
Khối đa diện là phần không gian $\mathbb{R}^3$ bao bởi hữu hạn mặt, mỗi mặt là một miền bao bởi đa giác trong một mặt phẳng.

Biên của khối đa diện là hội của các mặt này.

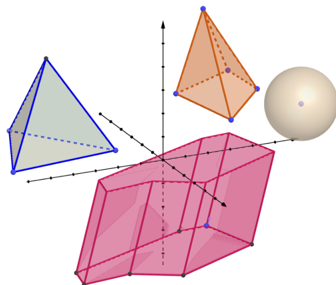
Mỗi mặt biên S bao bởi một đa giác trong một mặt phẳng P trong $\mathbb{R}^3$ có hình chiếu vuông góc xuống một trong ba mặt phẳng tọa độ là một đa giác T.

Do đó S là đồ thị của một hàm liên tục (hàm tuyến tính xác định mặt phẳng P) xác định trên tập bị chặn T.

Vì vậy, S có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$, nên khối đa diện có thể tích. $\square$



(a) Những hình có diện tích.



(b) Những hình có thể tích.

Ví dụ: quả cầu có thể tích

Xét quả cầu trong $\mathbb{R}^3$ cho bởi $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Nửa *mặt cầu* trên là đồ thị của hàm $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ với (x, y) nằm trong hình tròn $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Vì hình tròn có diện tích và hàm trên liên tục, nên theo Định lý 3.7 (khả tích trên tập có thể tích = bị chặn + liên tục hầu khắp), hàm trên khả tích.

Như vậy, Mệnh đề 3.8 cho ta biết đồ thị của hàm này có thể tích không trong $\mathbb{R}^3$.

Tương tự nửa mặt cầu dưới cũng có thể tích không, nên mặt cầu có thể tích không.

Do đó, theo Định lý 3.3, quả cầu có thể tích. 

Tính chất của tích phân trên miền tổng quát

Mệnh đề (3.10)

Nếu f *và* g *khả tích trên* D *thì*

1. $f+g$ *khả tích và*

$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g.$$

2. *Với mọi số thực* c *thì* cf *khả tích và*

$$\int_D cf = c\int_D f.$$

3. *Nếu* $f \le g$ *thì*

$$\int_D f \le \int_D g.$$

Chứng minh phần 1

Lấy một hình hộp I chứa D, và gọi F và G lần lượt là mở rộng của f và g lên I, bằng 0 ngoài D.

Theo định nghĩa của tích phân, do f và g khả tích trên D nên F và G khả tích trên I. Theo tính chất của tích phân trên hình hộp, ta có $F+G$ khả tích trên I và
$$\int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G.$$
Vì $F+G$ là mở rộng của $f+g$ lên I, bằng 0 ngoài D nên $F+G$ khả tích trên I dẫn tới $f+g$ khả tích trên D. Hơn nữa,

$$\int_D (f+g) = \int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G = \int_D f + \int_D g.$$

Đây là điều phải chứng minh. 

Mệnh đề (3.11)

Cho D là một tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, f và g bị chặn trên D, và $f = g$ trên D trừ ra một tập có thể tích không.

Khi đó, f khả tích khi và chỉ khi g khả tích, và

$$\int_D f = \int_D g.$$

Tương tự với tích phân trên một miền chữ nhật, *giá trị của một hàm bị chặn trên một tập có thể tích không không ảnh hưởng đến tích phân.*

Chứng minh

Lấy một hình hộp I chứa D. Gọi F và G là các mở rộng của f và g lên I, bằng 0 ngoài D. Khi đó, $F = G$ trên I trừ ra một tập có thể tích không.

Nếu f khả tích trên D thì F khả tích trên I. Do đó, theo Định lý 2.11, G khả tích trên I nên g cũng khả tích trên D. Cuối cùng, ta có được

$$\int_D f = \int_I F = \int_I G = \int_D g.$$

Đây là điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.12

(thêm bớt một tập có thể tích không không ảnh hưởng tới tích phân)

Cho D là tập con bị chặn của $\mathbb{R}^n$, C là tập con của D có thể tích không, và f bị chặn trên D.

Khi đó, f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên $D \setminus C$, và

$$\int_D f = \int_{D \setminus C} f.$$

Chứng minh

Đặt hàm g xác định trên D sao cho $g = f$ trên $D \backslash C$ và $g = 0$ trên C. Theo Mệnh đề 3.11 thì g cũng khả tích trên D và $\int_D g = \int_D f$.

Mặt khác, từ định nghĩa của tích phân trên tập tổng quát, ta có

$$\int_D g = \int_{D \backslash C} g = \int_{D \backslash C} f.$$

Như vậy, ta được $\int_D f = \int_{D \backslash C} f$. 

Hệ quả 3.13

Cho D_1 *và* D_2 *là hai tập con bị chặn của* $\mathbb{R}^n$*. Giả sử* $D_1 \cap D_2$ *có thể tích không. Nếu* f *khả tích trên* D_1 *và trên* D_2 *thì* f *khả tích trên* $D_1 \cup D_2$*, và*

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Ghi chú: Kết quả này cho phép ta tính tích phân trên một miền bằng cách chia miền đó thành những miền đơn giản hơn.

So sánh với kết quả tương tự như trên tích phân một chiều:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Chứng minh

Đặt f_1 xác định trên $D = D_1 \cup D_2$ sao cho $f_1 = f$ trên D_1 và $f_1 = 0$ trên $D \backslash D_1$. Tương tự, đặt f_2 xác định trên D sao cho $f_2 = f$ trên D_2 và $f_2 = 0$ trên $D \backslash D_2$.

Vì f khả tích trên D_1 nên từ định nghĩa tích phân, ta có ngay f_1 khả tích trên D và $\int_D f_1 = \int_{D_1} f$. Tương tự, f_2 khả tích trên D và $\int_D f_2 = \int_{D_2} f$.

Ta có $f_1 + f_2 = f$ trên $D \backslash (D_1 \cap D_2)$. Vì $f_1 + f_2$ khả tích trên D và $D_1 \cap D_2$ có thể tích không, nên do Mệnh đề 3.11, f khả tích trên D và

$$\int_D f = \int_D (f_1 + f_2) = \int_D f_1 + \int_D f_2 = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Đây là điều cần chứng minh. $\square$

Hệ quả 3.14 (tính cộng của thể tích)

Nếu D_1 *và* D_2 *có thể tích và* $D_1 \cap D_2$ *có thể tích không thì*

$$|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|.$$

Đặc biệt, điều này đúng khi D_1 và D_2 rời nhau.

Ghi chú: Đây là một trong những tính chất nền tảng của thể tích mà ta hướng tới từ đầu. Khi tính diện tích một hình ta vẫn thường chia hình đó thành những hình đơn giản hơn bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong (vốn có diện tích không), rồi cộng các diện tích của các hình đơn giản hơn đó lại với nhau.

Tóm tắt về tích phân trên miền tổng quát

Cho $D \subset \mathbb{R}^n$ bị chặn.

- Hàm f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên bất kỳ hình hộp I chứa D.
- Tập D có thể tích n-chiều khi và chỉ khi ∂D (biên của D) có thể tích n-chiều không.
- Với tập D có thể tích, hàm f khả tích trên D khi và chỉ khi f bị chặn và liên tục hầu khắp trên D.
- Với f và g bị chặn trên D và $f = g$ trừ ra một tập có thể tích không, khi đó, f khả tích khi và chỉ khi g khả tích và $\int_D f = \int_D g$.
- Với tập $C \subset D$ có thể tích không và f bị chặn trên D, hàm f khả tích trên D khi và chỉ khi f khả tích trên $D \backslash C$ và $\int_D f = \int_{D \backslash C} f$.
- Cho tập D_1 và D_2 bị chặn. Giả sử $D_1 \cap D_2$ có thể tích không. Nếu f khả tích trên D_1 và trên D_2, thì f khả tích trên $D_1 \cup D_2$ và $\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$.